

Θεωρία Αριθμών

7/10/15

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ φυσικοί αριθμοί

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\text{πρωτ}} \mathbb{N}$ Απεικόνιση
 $(n, m) \rightarrow n + m$

Ορισμός Απεικόνισμα
 $A \rightarrow B$
 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ παραστήσει κάθε φυσικό

~ Γ και Δ σύνολα $\Rightarrow \Gamma \times \Delta$ καρτεσιανό γινόμενο
 $\Gamma \times \Delta = \{ (x, y) \mid x \in \Gamma \text{ και } y \in \Delta \}$

~ Έχει σημασία η διακρίση $(1, 2) \neq (2, 1)$ αλλά $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

Επίσης ορίζεται και ο πολλαπλασιασμός

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\text{πρωτ}} \mathbb{N}$

$(n, m) \mapsto n \cdot m = \underbrace{n + n + \dots + n}_{m \text{ φορές}} = \underbrace{m + m + \dots + m}_{n \text{ φορές}}$

Αφαίρεση: ΟΧΙ ΚΑΛΗ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ $\mathbb{N}$

to 0 καλείται ουδέτερο ως πρόσθετο γιατί έχει την ιδιότητα $n + 0 = 0 + n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Δεν έχουμε όμως αντίθετος

Διαίρεση: ΟΧΙ ΚΑΛΗ ΟΡΙΣΜΕΝΗ: $1:2 = 1/2 \notin \mathbb{N}$

to 1 καλείται ουδέτερο ως πολλαπλασιαστικό: $1 \cdot n = n \cdot 1 = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Δεν έχουμε όμως αντιστρέφους $2^{-1} \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

Πρόταση: το $(\mathbb{N}, +)$ να γίνει καλά ορισμένο.

~ Πρέπει ένω στο σύνολο το οποίο να έχει όλες τις ιδιότητες του $\mathbb{N}$ και να είναι καλά ορισμένο ως προς πρόσθεση.

$\mathbb{N}$ μαζί με τους αριθμούς
 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ Ακέραιοι

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$;;;

$(\mathbb{Z}, +)$ είναι κατά ορισμό δίοση $\forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $n+m=0$. Αυτός το m το συμβολίζεται με $-n$. Αλλά γενικότερα $\forall n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ με $n+m=0$

Εξο $\mathbb{Z}$ ορίζεται ο πλάτος, αλλά δεν έχει καθε μη-μηδενική ποσότητα αντίστροφο.

Θέλουμε $\mathbb{Z}$ μαζί με τους αριθμούς.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ και } q \neq 0 \right\}$

$(\mathbb{Q}, +)$ κατά ορισμό, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ κατά ορισμό

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ και ισχύει $a(bx) = (ab)x$ επίτηρα.

$x^2 = 2$ ή $x = \sqrt{2}$ όχι αριθμός - όριο μιας ακολουθίας που να σφαιρύνει γύρω το πραγματικό και είναι 2.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Μια δήλωση (statement) είναι μια γραμματική πρόταση η οποία είναι αποκλειστικά αληθής ή ψευδής (όχι και τα δύο)

π.χ. $2+2=4$ ΝΑΙ $2+2=5$ ~~ΝΑΙ~~ ΟΧΙ

Τι έλεγε πάλι ΟΧΙ

Αυτός είναι φανερός. Εξαρτάται από το από

Μια γραμματική πρόταση είναι μια δήλωση η οποία περιέχει έναν πεπερασμένο αριθμό μεταβλητών, και η αλήθεια εξαρτάται από τις τιμές που λαμβάνουν οι μεταβλητές.

π.χ. $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ ψευδής

$(1)^2 = 1^2 \Rightarrow -1 = 1$

$x^2 = y^2$ και x, y φυσικοί $\Rightarrow x = y$ • $|x| > 0$ ψευδής

$$\sqrt{x} \geq 0 \quad \text{if } x \geq 0 \quad \text{then } \sqrt{x} \geq 0$$

$$\text{over } x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{x} \geq 0, \quad x \geq 0$$